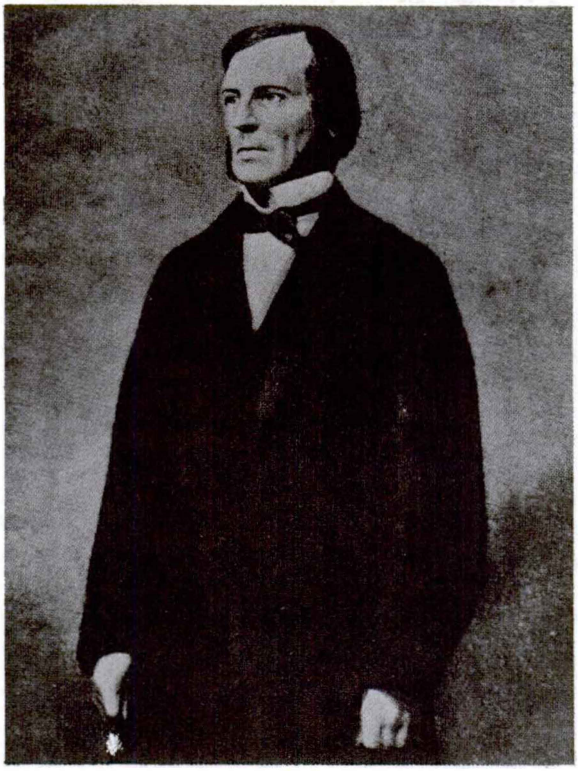


George Boole (1815-1864)

EL NAIXEMENT DE L'ÀLGEBRA DE LA LÒGICA

per

Enric Trillas

Babies are illogical;
Nobody is despised who can manage a crocodile;
Illogical persons are despised.
Babies cannot manage crocodiles.

(C. L. Dogson, "Lewis Carroll", 1832-1898)

El camí d'una nova lògica*

La història de la Lògica pot ésser dividida, simplificant, en tres èpoques: Lògica clàssica, Lògica escolàstica i Lògica matemàtica. Durant la primera les fórmules lògiques consten de paraules del llenguatge ordinari sotmeses a les regles sintàctiques usuals; en la segona la Lògica ja és abstreta del llenguatge i caracteritzada per regles sintàctiques diferenciades i funcions semàntiques especialitzades i en la tercera la Lògica es distingeix per l'ús d'un llenguatge artificial on paraules i signes tenen funcions semàntiques limitades. Mentre a les dues primeres èpoques els "teoremes" lògics eren deduïts del llenguatge ordinari, a la tercera hom ho fa de manera diferent: primer hom construeix un sistema purament formal i després hom en busca una interpretació en el llenguatge ordinari.

El nom de Lògica Matemàtica fou introduït per Peano i per bé que Leibniz en pot ésser considerat el precursor, la seva data de naixement és l'any de l'aparició del primer llibre de Boole: 1847. L'obra de Boole posà èmfasi en el fet que la Lògica ha d'associar-se amb la Matemàtica més que no pas amb la Metafísica, com aleshores defensava el lògic escocès Sir William Hamilton seguint Aristòtil. Després hi tornarem.

(*) Pel que fa a aquest treball, l'autor ha de dir que totes les idees es troben a
(1) "The New Logic: A 1932 Lecture", de Karl Menger,
(2) "Historia de la Lógica", editada per A.N. Prior,
(3) "L'Algebra della Logica", de P. Freguglia,
(4) "The Mathematical Analysis of Logic", de George Boole,
(5) "L'algèbre de la Logique", de Louir Couturat,
(6) "Diccionario de Filosofía", de J. Ferrater Mora.

Com diu Karl Menger, "és un fet que durant dos mil anys la lògica fou la més conservadora de totes les branques del coneixement". Aristòtil suposà, com a punt de partida, que "tota proposició adscriu un predicat a algun subjecte", i les proposicions foren classificades, d'una banda en *afirmatives* o *negatives* i d'altra banda en *particulars* o *universals:* "Tots els gats són mamífers" és universal i afirmativa; "alguns mamífers són gats" és particular i afirmativa; "alguns mamífers no són gats" és particular i negativa; "cap gat no és un peix" és universal i negativa. Per Aristòtil, *tota inferència consisteix a derivar una tercera proposició de dues proposicions d'una d'aquestes quatre formes*; així, de les premisses tots els gats són mamífers i tots els mamífers vertebrats se segueix que tots els gats són vertebrats. Aristòtil agrupà totes les inferències que considerà possibles en 14 varietats i, a l'Edat Mitjana, hom considerà que aquests *modes d'inferència* eren 19, agrupats en 4 figures, i designats pels noms Barbara, Celarent, Darii, etc. P. ex., el mode Barbara correspon a la inferència d'una proposició universal afirmativa a partir de dues premisses universals i afirmatives.

Els anomenats *tres principis fonamentals de la Lògica,* d'identitat, de contradicció i del tercer exclòs, també foren formulats per Aristòtil; però no ho féu en la Lògica sinó en la Metafísica.

El nucli de la Lògica d'Aristòtil, la teoria de proposicions subjecte-predicat, és el que fou considerat essencialment com *la Lògica pura* durant dos mil anys. Cal dir, però, que els escolàstics realitzaren, en moltes direccions, importants recerques lògiques que durant la il·lustració caigueren en l'oblit, substituïdes moltes vegades per consideraciones poc clares que, emperò, prepararen el camí d'una Lògica nova.

Els punts de vista de Leibniz, avançats al seu temps, romangueren llargament sense efectes directes. Ell veié clar que un tractament de les proposicions subjecte-predicat era poc adequat i que calia el suplement d'una lògica relacional; tractà els principis lògics i llurs relacions més sistemàticament i dissenyà el projecte d'una *Lingua Characterística Universalis* expressada en forma simbòlica i que permetés establir totes les proposición científiques de manera precisa fent servir, tothom, els mateixos símbols amb idèntics significats. Cregué en un *Calculus raciocinator* que havia de donar, per càlcul, qualsevol inferència

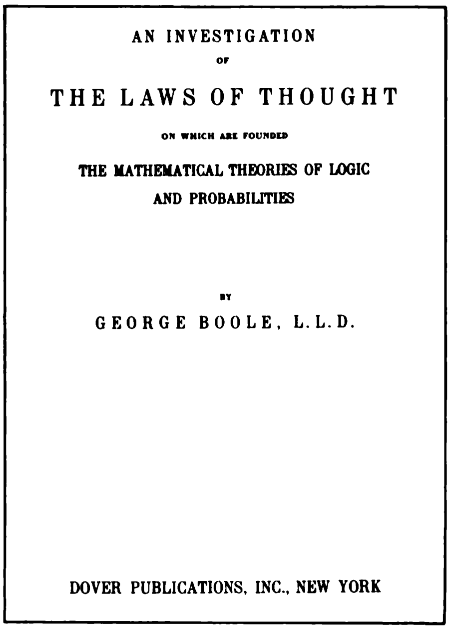
Abans d'entretenir-me uns instants en aquest moment històric cal dir que Kant, en la seva Lògica del 1800, diu: "La Lògica d'avui ve de l'Analítica aristotèlica... des del temps d'Aristòtil la lògica no ha guanyat gaire contingut ni res de fonamental... Aristòtil no podia deixar-se res d'important".

Apareixen els Matemàtics

El 1646 nasqué, a Leipzig, Gottfried Wilhelm Leibniz, que morí el 1716. Investigà molt aviat la sil·logística aristotèlica i l'*Ars Magna* de

Llull li captivà la imaginació, tot i comprenent-ne les limitacions; mai no escapà del punt de vista sil·logístic, el seu mètode de prova típic fou la reducció a l'absurd i féu intents de representació diagramàtica amb línies de punts unes vegades i cercles d'altres.

Leibniz cregué que un "concepte compost" podia ésser analitzat en un nombre d'elements simples, com els enters es descomponen en factors simples (idea que té un paper central en la numeració de Gödel). En creure que els noms expressen idees i els verbs proposicions alterà radicalment la base aristotèlica de la distinció i donà el germen del concepte de funció proposicional.


AN INVESTIGATION

OF

THE LAWS OF THOUGHT

ON WHICH ARE FOUNDED

THE MATHEMATICAL THEORIES OF LOGIC AND PROBABILITIES

BY

GEORGE BOOLE, L.L.D.

DOVER PUBLICATIONS, INC., NEW YORK

Figura 1

Cregué que seria possible de tractar la Lògica per "demostracions com els càlculs dels aritmètics o els diagrames dels geòmetres". És el primer que algebritza la Lògica; pel que fa a l'estructura del càlcul que volia establir, la fonamentava en les lleis:

(1) a és a.
(2) Si a és b i b és c, aleshores a és c.
(3) a és diferent de no-a, però a és intercanviable amb no-no-a.
(4) a és b si i només si no-b és no-a.
(5) ab significa l'addició de les propietats de a i de b, ab és a i també és b.
(6) Si a és b i és c, aleshores a és bc.

(7) ab és ba.
(8) a(bc) és (ab)c.

Deduí moltes conseqüències d'aquestes lleis. Per exemple, el que anomenà *Praeclarum Theorema:*

– Si a és b, i si c és d, aleshores ac és bd.

Introduí notacions especials per a la quantificació; p. ex., "algun a és b" ho escriví Aa = b. Diu I. Thomas que "si els treballs de Leibniz no haguessin estat tant de temps sense publicar no s'hauria fet esperar tant la plena llum del dia booleà".

Per als matemàtics són molt interessants els estudis del matemàtic i lògic francès Louis Couturat, especialment "La logique de Leibniz d'après des documents inédits", de 1901. També el llibre "G.W. Leibniz, Scritti di logica", de F. Barone (Bolonya, 1968), és interessant per al matemàtic pel fet de contenir els articles, traduïts a l'italià, "Saggio di calcolo universale", "Sulla prova della forma logica mediante grafici lineari", etc. Leibniz fou extraordinàriament prolífic i modernament se n'han anat trobant escrits inèdits (vegeu l'article Leibniz en el *Diccionario de Filosofía* de J. Ferrater Mora).

Malgrat que el valencià Joan Lluís Vives (1492-1540) féu servir triangles per a il·lustrar el sil·logisme Barbara i que, com hem dit, Leibniz també ho féu, i encara més sistemàticament, ha estat el nom de Leonhard EULER (nascut a Basilea el 1707, mort el 1783) el que ha quedat lligat als cercles per a il·lustrar gràficament el sil·logisme; això és degut al fet que ho escriví en les seves precioses "Cartes a una princesa d'Alemanya" de 1761. També Gottgried Ploucquet (nascut a Stuttgart el 1716, mort el 1790), que fou professor de Hegel, féu servir quadrats per tal d'estudiar el sil·logisme; és un precursor pel que fa a la quantificació total del predicat de què parlarem després.

Un altre matemàtic important que cal citar és Johann Heinrich Lambert (nascut a Mühlhausen, Alsàcia, el 1728, mort el 1777), que fou qui provà que π és un nombre irracional i que també fou físic i astrònom. Dedicà una sèrie d'assaigs a fer un *càlcul* de la Lògica: donats dos conceptes a i b, indicà amb ab llur part comuna, amb a + b llur combinació, amb $a\gamma$ el gènere de a i amb $a\delta$ la diferència de a, i postulà que $a = a\gamma + a\delta = a(\gamma + \delta)$.

Les coses començaven a estar a punt. Cal avançar una mica més i arribar a qui és, potser, el lògic més important de la primera meitat del segle XIX, el sacerdot catòlic Bernhard Bolzano, nascut el 1781 a Praga, de pare italià, i mort el 1848, un any després del primer llibre de Boole. Amb mètodes molt pesats, allò que tractà Bolzano per primera vegada sembla, avui, molt modern i, malauradament, moltes de les seves idees no foren enteses ni tingudes en compte durant la seva vida.

Féu servir un llenguatge parcialment formalitzat que constava d'alemany vulgar ampliat amb certs signes i termes tècnics. Bolzano creu que la lògica té la missió d'estudiar les proposicions en si (Sätze an sich) i segons ell les proposicions no són sinó enunciats amb els quals hom declara que quelcom és, independentment del fet que això sigui veritat. Intentà formalitzar les expressions lingüístiques i reduir-les a formes canòniques, creient que totes les frases són reductibles a la forma "A té b", on A és el subjecte, b el predicat i "té" la còpula, cosa que funciona bé en casos com "En Joan està afamat" = "En Joan té gana", però sembla rebuscat en "Això és or" = "Això té auritat". Encara que aleshores semblés estrany "Algun A és B" = "El terme "un-A-que-és-B" té no vacuïtat", posat en termes actuals $A \cap B \neq \emptyset$ sembla que adquireix un sentit important. Bolzano, però, no presentà un sistema complet de regles i deixà que el lector cregués en tals reduccions després d'un seguit d'exemples.

Al costat de les proposicions Bolzano examinà les *representacions,* com a contingut de les proposicions i, insistint que la veritat no és de cap manera una existència, investigà a partir d'una proposició, vertadera o falsa, com es comportava respecte a la veritat o la falsedat mitjançant la substitució de qualsevol dels seus termes per a tots aquells que Fossin Preservatius-de-la-Proposicionalitat. Si el nombre de tals variants era finit definia el grau de validesa d'una proposició, respecte a un o més dels seus termes constituents, com el quocient entre el nombre de les seves variants vertaderes i el nombre de totes les variants; si aquesta raó és 1 la proposició és universalment vàlida, si és 0 és universalment contra-vàlida i si és major que 0 és consistent.

La distància que separa Bolzano dels seus contemporanis és molt gran. De fet una crisi en l'antiga Lògica fou oberta pels matemàtics tan aviat com fallà la confiança en la intuïció geomètrica i una *reconstrucció purament lògica* de la Geometria recomençà amb una enumeració de totes les hipòtesis matemàtiques de què hom deduïa el total de teoremes per mètodes estrictament lògics, cosa que comportà la recerca de tots *els principis d'inferència* usats en les deduccions matemàtiques, i es féu clar que l'antiga lògica hi era poc adient; per això alguns matemàtics consideraren necessària una reconstrucció de la Lògica: cal entendre, però, que el resultat d'aquesta reconstrucció (*Logistik*, en alemany) avui és considerat una part del contingut clàssic de la Lògica. *La Nova Lògica Real* només començà quan parà la Logística.

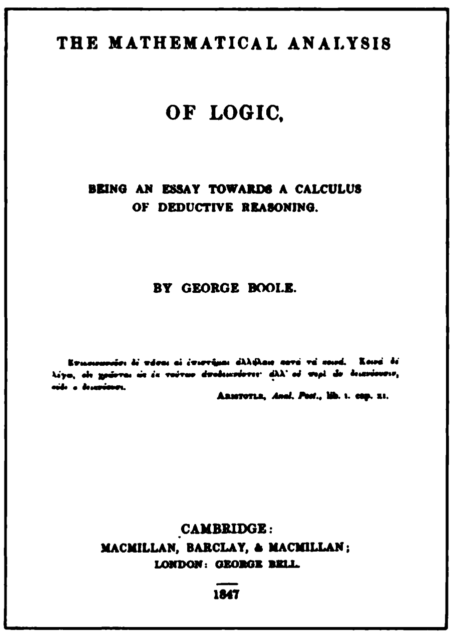
La gènesi de l'Àlgebra de la Lògica

A la mateixa època, però a les Illes Britàniques, passaven altres coses. La primera fou la polèmica Hamilton-DeMorgan.

Sir William Hamilton (1788-1856) fou un lògic escocès, que hom no ha de confondre amb el matemàtic irlandès Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), i els seus escrits, àmpliament polèmics, no donen idea clara del seu sistema; no obstant això, tingué una munió de deixebles que intentaren organitzar les seves idees. La innovació més celebrada, bé que no fou pas una invenció totalment seva, és la *quantificació total* del predicat:

1 Tot A és tot B
2 Tot A és algun B
3 Algun A és tot B
4 Algun A és algun B
5 Qualsevol A no és cap B

que representen tots els modes possibles com es poden relacionar dues classes en extensió (com ho féu veure J. Díaz Gergonne); i els


THE MATHEMATICAL ANALYSIS

OF LOGIC,

BEING AN ESSAY TOWARDS A CALCULUS
OF DEDUCTIVE REASONING.

BY GEORGE BOOLE.

ARISTOTLE, Anal. Post., lib. i. cap. xi.

CAMBRIDGE:
MACMILLAN, BARCLAY, & MACMILLAN;
LONDON: GEORGE BELL.

1847

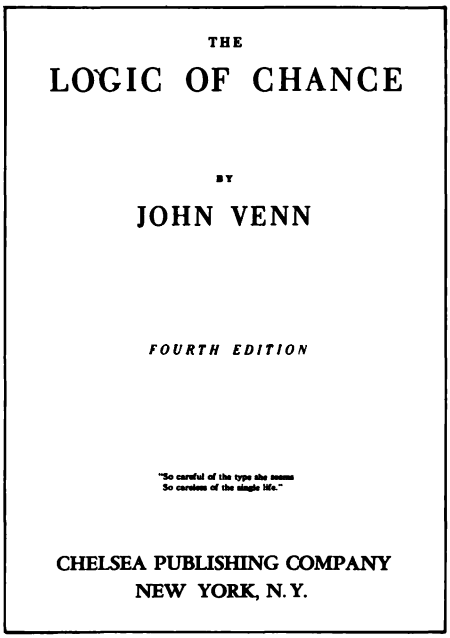
Figura 2

6 Qualsevol A no és algun B
7 Algun A no és cap B
8 Algun A no és algun B,

que, per tal com no es poden expressar per classes, han estat rebutjats per molts lògics. Cal pensar que amplien els quatre AEIO dels aristotèlics.

El 1846 Hamilton acusà DeMorgan de plagiar aquesta quantificació. En la llarga controvèrsia que seguí DeMorgan féu una minuciosa dissecció de tot el sistema sil·logístic. De fet compartien moltes idees, especialment que calia reformar i ampliar la sil·logística. Diguem que aquest problema torna a estar, en forma semblant, en els interessos d'alguns lògics, particularment d'aquells que s'apropen a la lògica de la vaguetat per la banda "fuzzy". DeMorgan introduí quantificadors com "Molts" i "Pocs" que avui són típicament zadehians.

Augustus DeMorgan nasqué el 1806 a Madura (Índia) i morí el 1871. Fou el fundador i el primer President de la London Mathematical Society. La seva obra lògica es troba a la *Formal Logic* (Londres 1847) i, sobretot, a les *cinc memòries* publicades en les *Cambridge Philosophical Transactions* des de 1846 fins a 1862; és en la de 1849, titulada "On the Structure of Syllogism and on the Application of the Theory of Probabilities to Questions of Argument and Authority", on estudia probabilísticament els


THE

LOGIC OF CHANCE

BY

JOHN VENN

FOURTH EDITION

"So careful of the type she seems
So careless of the single life."

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
NEW YORK, N. Y.

Figura 3

anteriorment citats quantificadors vagues. Fou ell qui introduí l'útil artifici de l'*univers del discurs,* després adoptat generalment i, com que féu servir a bastament les ja conegudes lleis de negació d'una conjunció i d'una disjunció, aquestes reberen el seu nom.

Adoptà una escriptura per als sil·logismes que després, perfeccionada, donà lloc als signes actuals. Així, tots els X són alguns Y ho escriví X))Y i alguns X són alguns Y ho escriví X()Y.

De fet, resolgué de manera fàcil el problema inferencial del sil·logisme donant un sentit matemàtico-relacional a l'operació d'eliminació del terme mitjà, però encara que matematitzà i generalitzà el sil·logisme, no fou capaç de sortir de la mentalitat de la sil·logística. Fou molt amic de George Boole, que, en el Prefaci del seu primer llibre, diu: "Durant la primavera d'enguany la meva atenció fou dirigida cap a la disputa entre Sir W. Hamilton i el Prof. DeMorgan i l'interès que aquesta disputa em produí m'induí a reprendre el traç, avui gairebé oblidat, d'antigues recerques".

Amb Boole hom féu, com després veurem, el primer pas en la reconstrucció de la Lògica. Aquest fou el desenvolupament del Càlcul de Classes o Àlgebra de la Lògica durant la segona meitat del segle XIX.

Cal recordar que la qüestió que la lògica clàssica tracta bàsicament és, conegudes les relacions de dues classes amb una tercera, què es pot dir sobre les relacions de les dues classes entre elles. El càlcul de classes, arrancant d'unes quantes, poques, proposicions, donà un tractament sistemàtic de *totes* les relacions entre classes, i entre els seus resultats n'hi ha 19 que corresponen als 19 modes d'inferència escolàstics. Però aquests 19 teoremes ni són els únics, ni ocupen una posició especialment distingida, ni són necessaris per tal de fonamentar un càlcul sistemàtic de classes i, per bé que s'allarguessin a més de 19, això no seria suficient per a la construcció de tot el càlcul de classes. *El càlcul de classes és, doncs, un definitiu pas endavant en vist l'antiga lògica de la inclusió de classes.*

George Boole i el naixement de l'Àlgebra de la Lògica

Mentre Hamilton i Cayley desenvolupaven dos nous tipus d'àlgebres, un tercer tipus diferent n'era introduït per un anglès autodidacte. George Boole nasqué a Lincoln, Anglaterra, el 1815, en una família de comerciants poc adinerats i tingué únicament una educació escolar primària; aprengué Grec i Llatí pel seu compte i després féu de mestre d'escola elemental, temps durant el qual estudià matemàtiques, amb les obres de Laplace i Lagrange, i altres llengües estrangeres. Com hem dit, era amic de DeMorgan i la polèmica amb Hamilton el portà a escriure un petit llibre titulat "The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning", aparegut el 1847 i del qual DeMorgan digué que era *epoch-making.*

La visió que Boole tenia de la Matemàtica influí molt en la seva obra lògica. Ell objectà la consideració de la Matemàtica com a ciència del nombre i la considerà molt més general; digué:

"... el caràcter definitiu d'un veritable càlcul, ja que és un mètode basat en l'ús de signes dels quals hom coneix les lleis de combinació i els resultats de les quals admeten una interpretació consistent. Sobre aquest principi proposo l'establiment del Càlcul de la Lògica per al qual demano un lloc entre les agraïdes formes de l'Anàlisi matemàtica". Boole era un analista que en el seu *Treatise on Differential Equations* de 1859 introduí l'algorisme de l'operador diferencial D per facilitar la solució de les equacions diferencials.

A partir d'ara la Matemàtica no es limitarà a magnituds contínues.

Qualsevol tema presentat de manera tal que consti de símbols i regles precises d'operar-hi i només subjecte al requeriment de consistència interna, serà part de les Matemàtiques.

Encara que el llibret de 1847 no aconseguí un ampli reconeixement matemàtic, fou probablement sota el pes d'aquest que Boole, el 1849, fou nomenat catedràtic de Matemàtiques al recentment establert Queen's College de Cork, Irlanda, on morí el 1864, deu anys més tard de publicar el seu llibre més famós, "An Investigation of The Laws of Thought on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities". El reconeixement, i tot un grau honorari de la Universitat de Dublín, li arribà abans de morir. Bertrand Russell va dir que el descobriment més gran del segle XIX fou la natura de la Matemàtica pura i afegí: "La Matemàtica pura fou descoberta per Boole en una obra que titulà *The Laws of Thought*". Cantor no volgué acceptar mai la importància de l'obra de Boole, ni cregué que servís per a res.

En *The Laws of Thought* es perfeccionen les idees del primer llibret i se'n fan aplicacions a la Lògica clàssica i a les probabilitats. Així, un capítol sencer és dedicat a estudiar "amb equacions" alguns arguments del "Demostration of the Being and Attributes of God" de Samuel Clarke i de la "Ethica ordine geometrico demonstrata" de Baruch SPINOZA.

A la seva mort deixà molts papers inèdits i molta gent demanà a la seva vídua d'examinar-los per publicar-los. DeMorgan llegí aquests papers, molts dels quals relacionats amb la Lògica, i en una nota a la Royal Society aconsellà que no fossin publicats, argumentant especialment que podrien ésser presos com les opinions definitives del seu amic Boole. Val la pena de llegir el treball de Mary B. Hesse, publicat als *Annals of Science* el 1952 i titulat "Boole's Philosophy of Logic".

Dels molts treballs sobre el sistema de Boole val la pena de citar el de Charles Sanders Peirce titulat "On an improvement on Boole's Calculus of Logic", publicat el 1867, tres anys després de la mort de Boole, en els *Proceedings* de l'American Academy of Arts and Sciences.

The Mathematical Analysis of Logic, el llibret de Boole de 1847

No és possible, evidentment, explicar aquí tot el llibre. Intentarem, però, exposar en forma resumida el que considerem els principals trets del sistema booleà que ja són en aquest llibre, encara que després en les *Laws of Thought* el sistema es perfeccioni i agafi més volada. Com ja hem dit el llibre fou publicat a Cambridge per Macmillan, Barclay & Macmillan el 1847, en format 1/4 i 82 pàgines; ha estat reeditat per Basil Blackwell, a Oxford, els anys 1948, 1949, 1951 i 1965. Hi ha una edició espanyola de 1979 a Eds. Càtedra de Madrid; això de la càtedra no els deu provar gaire perquè uns petits errors tipogràfics en unes fórmules a l'original anglès es repeteixen exactament a l'edició espanyola.

Deixem parlar Boole, que representa amb *lletres* X, Y, Z, ... classes d'objectes d'un univers del discurs que representa, diu, amb el ***símbol*** 1. Anomena *símbols electius* x, y, z, ... aquells que, operant sobre qualsevol domini, en seleccionen els corresponents X, Y, Z, ... Diu que representen operacions mentals i que el que n'interessa són les *lleis* de combinació i successió que tradueixin el funcionament d'aquesta operació mental. Cal precisar aquí que, per Boole, una proposició és tota frase que afirma o nega i té, necessàriament, dos termes: aquell de qui hom parla, el subjecte, i allò que hom afirma o nega del subjecte, el predicat, de manera que ambdós estan connectats sempre per alguna modificació del verb substantiu.

Principi primer x = x: el resultat de seleccionar de 1 tots els X que conté és la classe X.

Def. 1 xy representa, successivament, la selecció en 1 de la classe Y i, a partir d'aquesta, els individuals que siguin X. El resultat en són els elements que són tant de Y com de X.

Def. 2 Una expressió en la qual hom empri símbols electius és una *funció electiva*. Una equació els membres de la qual siguin funcions electives és una *equació electiva*.

Def. 3 El símbol 1-x aplicat a un domini donat en seleccionarà tots els objectes no-X que contingui.

Llei 1 És indiferent l'ordre en què hom faci dos actes d'elecció: xy = yx.

Llei 2 El resultat d'un acte d'elecció no depèn de la classificació del domini:

$$x(u + v) = xu + xv,$$

on u + v representa el domini sense classificar i u, v les parts de la classificació.

Llei 3 Llei de l'índex o llei fonamental del pensament: $x^n = x$, amb n = 2, 3, ...
El resultat d'una elecció feta més d'una vegada, una rera l'altra, és el resultat de la primera vegada.

De fet, Boole fa servir + sense dir-ho explícitament i només suma classes disjuntes, fugint sempre de x + x. Vol establir un càlcul aritmètic amb els signes =, ., +, –, 1, i sotmès a totes les lleis anteriors, de les quals avisa que la de l'índex és la que marca la gran diferència amb l'aritmètica. Accepta el símbol 0, que selecciona la classe buida, però no el defineix explícitament. La seva idea és representar les proposicions per equacions electives i la inferència dur-la a terme per càlculs. De fet, amb Boole s'arriba al *Calculem!* de Leibniz.

Proposició 1	La proposició A: "Tots els X són Y", s'escriu	$xy = x$ $x - xy = 0$ $x(1-y) = 0.$
Prop. 2	La proposició E, "Cap X no és Y", s'escriu	$xy = 0.$
Prop. 3	La proposició I, "Alguns X són Y", s'escriu	$v = xy,$

ja que hi ha alguns termes comuns a les classes X, Y i són una classe V que pot ésser separada.

Cal advertir que aquí el símbol v pot ésser aplicat tant als X com als Y. Més endavant això serà diferent.

Prop. 4 La proposició 0, "Alguns X no són Y", s'escriu $v = x(1-y)$.

Diu Boole: *"Aquestes quatre equacions comprenen tota la teoria de les proposicions categòriques i, pel que fa a l'ús de l'anàlisi per a la deducció d'inferències lògiques, hom no pot desitjar res més".*

Definició 4 Un sil·logisme consta de tres proposicions de les quals la darrera o *conclusió* és conseqüència lògica de les dues primeres o *premisses.*

Ara es tracta d'obtenir per càlcul, amb signes electius, la conclusió de les premisses.

Exemple 1

Tots els Y són X	... $y(1-x)=0$	$\rightarrow y - yx = 0$	$\rightarrow zy - zyx = 0$ $\downarrow$
Tots els Z són Y	... $z(1-y)=0$	$\rightarrow z = zy$	$\nearrow z - zx = 0$ $\downarrow$
Tots els Z són X		$\leftarrow$	$z(1-x)=0$

Exemple 2

Tots els X són Y	... $x(1-y)=0$	$\rightarrow x = xy$	$\rightarrow zx = zxy = xzy$
Cap Z no és Y	... $zy = 0$		$zx = 0$
Cap Z no és X			$\leftarrow zx = 0$

Exemple 3

Tots els X són Y	... $x(1-y)=0$	$x = xy$	$\rightarrow zx = zxy$ $\downarrow$
Tots els Z són Y	... $z(1-y)=0$	$z = zy$	$\rightarrow zx=xzy=xz=zx$ $\downarrow$
No hi ha inferència			$\leftarrow 0=0$

Exemple 4

Tots els X són Y	... $x(1-y)=0$	$x=xy$	$\rightarrow vx=vxy=xvy$
			$\downarrow$
Alguns Z no són Y	... $vz=v(1-y) \rightarrow$	$vy=v(1-z)$	$\rightarrow vx=xv(1-z)=vx-xvz$
			$\downarrow$
Alguns Z no són X			$\leftarrow 0=(vz)x$
			(v s'aplica a z, no a x)

Observacions a les "sumes"

Boole anomena "suma exclusiva" $x(1-y)+y(1-x)$, el que avui és diferència simètrica, $x+y-2xy$

"suma no-exclusiva" $x(1-y)+y(1-x)+xy$, l'actual reunió, $x+y-xy$

Exemple 5. Sil·logisme hipotètic

Si X és vertadera, ho és Y	... $x(1-y)=0$	
Si Z és vertadera, ho és Y	... $z(1-y)=0$	
Però, X és vert o Z és vert (exc.)	... $x+z-2xz=1 \rightarrow x(1-y)+z(1-y)-2xz(1-y)=1-y$	
Y és vertadera	$y=1$	$\leftarrow 0=1-y$

Exemple 6. Sil·logisme hipotètic

Si X és vertadera, ho és Y ...	$x(1-y)=0$
Si W és vertadera, ho és Z ...	$w(1-z)=0$
Però, X és vert o W és vert (no-exc.)	$x+w-xw=1 \rightarrow x(1-y)(1-z)+w(1-y)(1-z)-xw(1-y)(1-z)=(1-y)(1-z)$
Y és vert o Z és vert (no-exc.)	$y+z-yz=0 \leftarrow 0=(1-y)(1-z)$

Passem ara a la part més bonica del primer llibre (que també és a les *Laws of Thought)*: el *desenvolupament de les funcions electives* i la *solució de les equacions electives.*

Sigui $\phi(x)$ una funció electiva de la variable electiva x. Diu Boole: "ja que els símbols electius es combinen d'acord amb les lleis de la quantitat, podem desenvolupar ϕ pel teorema de McLaurin, excloent els casos coneguts en què hom no ho pot fer". Així:

$$\phi(x)=\phi(0)+\phi'(0)x+\phi''(0)/2!\,.x^2+\text{etc},$$

però, per la llei de l'índex $x^2=x^3=\ldots=x$, i tenim

$$\phi(x)=\phi(0)+x(\phi'(0)+\phi''(0)/2!+\text{etc}).$$

Però la part del parèntesi val $\phi(1) - \phi(0)$, ja que la primera equació dóna, per a $x = 1$,

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \phi''(0)/2! + \text{etc.}$$

Tenim

$$\phi(x) = \phi(0) + x(\phi(1) - \phi(0)) \quad \text{o bé} \quad \phi(x) = \phi(1)x + \phi(0)(1 - x).$$

Els valors numèrics $\phi(1)$ i $\phi(0)$ són anomenats els mòduls de la funció ϕ. És immediat que dues funcions electives F i G són iguals si i només si $F(0) = G(0)$ i $F(1) = G(1)$.

Boole tradueix el resultat anterior dient: *"Tota funció electiva en la qual només siguin emprades potències enteres del símbol electiu és reductible a primer grau"*. És un resultat que permet desenvolupar les funcions de més variables:

$$\begin{aligned}\phi(x, y) = {} & \phi(x, 0) + y(\phi(x, 1) - \phi(x, 0)) = \phi(00) + x(\phi(10) - \phi(00)) + \\ & + y(\phi(01) + x(\phi(11) - \phi(01)) - \phi(00) - x(\phi(10) - \phi(00))) = \\ & = \phi(00)(1 - x - y + xy) + \phi(01)(y - xy) + \phi(10)(x - xy) + \\ & + \phi(11)xy = \phi(00)(1 - x)(1 - y) + \phi(01)(1 - x)y + \\ & + \phi(10)x(1 - y) + \phi(11)xy.\end{aligned}$$

Anomena també mòduls els nombres $\phi(00)$, $\phi(01)$, $\phi(10)$, $\phi(11)$ i *constituents* els factors $(1 - x)(1 - y)$, ..., xy. I diu que és clar, per inducció, que si tenim n símbols electius hi haurà 2^n mòduls i 2^n constituents, per exemple,

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) = {} & \phi(000)(1 - x)(1 - y)(1 - z) + \phi(001)(1 - x)(1 - y)z + \\ & + \phi(010)(1 - x)y(1 - z) + \phi(100)x(1 - y)(1 - z) + \\ & + \phi(110)xy(1 - z) + \phi(101)x(1 - y)z + \phi(011)(1 - x)yz + \\ & + \phi(111)xyz.\end{aligned}$$

Boole fa observar que els constituents són funcions exclusives, que compleixen la llei de l'índex i que sumen 1. Així,

- $(x(1 - y)(1 - z))^2 = x^2(1 - y)^2(1 - z)^2 = x(1 + y^2 - 2y)(1 + z^2 - 2z) = x(1 - y)(1 - z)$,
- $x(1 - y)(1 - z). xy(1 - z) = xy(1 - y)(1 - z) = x0(1 - z) = 0$

són exemples ben generals i, pel que fa a la suma, Boole diu que n'hi ha prou de pensar que si és $\phi(x, y, z, ...) \equiv 1$, amb qualsevol nombre de variables, tots els seus mòduls valen 1, així, si és $\phi(x, y) \equiv 1$, hom té $\phi(11) = \phi(01) = \phi(10) = \phi(00) = 1$ i $1 = xy + x(1 - y) + (1-x)y + (1-x)(1-y)$.

Aquestes fórmules donen la descomposició de l'univers del discurs en els seus constituents mínims.

Vet aquí ara els quatre teoremes de Boole sobre les equacions electives.

Teor. 1 Donada una equació electiva $\phi(x, y, ...) = 0$, i escrita en la forma $\sum_{i=1}^{r} a_i t_i = 0$, on els a_i són els mòduls i els $t_i = t_i(x, y, ...)$ els constituents, per cada $a_i \neq 0$ podrem extreure l'equació $a_i t_i(x, y, ...) = 0$, la qual, juntament amb la resta de la donada, expressa el significat complet de l'equació $\phi(x, y, ...) = 0$.

Prova. Sigui $a_1 \neq 0$ i multipliquem l'equació per t_1; és,

$$0 = a_1 t_1^2 + \sum_{i=2}^{r} a_i t_i t_1 = a_1 t_1 .$$

Nota. Si a_i no afegeix símbols electius nous, aleshores l'equació que hom extreu és simplement la $t_i(x, y, ...) = 0$. Els nous símbols poden venir, per exemple, de tractar com a constants algunes variables de l'equació $\phi = 0$, com ha estat fet en desenvolupar les funcions de dues variables a partir de les d'una variable. Si hom arribés a $1 = 0$ és que no hi ha cap univers lògic per a les proposicions emprades, ço que vol dir que són *contradictòries.*

Teor. 2 Donada $\phi = 0$, cada terme $a_i t_i$ tal que $a_i \neq a_i^2$ (a_i no verifica la llei de l'índex) s'iguala a zero independentment.

Prova. Sigui $\phi = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + a_4 t_4$, on a_1, a_2 satisfan la llei de l'índex i a_3, a_4 no la satisfan. És,

$$\phi^2 = \phi = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3^2 t_3 + a_4^2 t_4,$$

que, restada de la donada, dóna:

$$0 = (a_3^2 - a_3)t_3 + (a_4^2 - a_4)t_4,$$

equació electiva que, pel teorema 1, s'escriu $t_3 = 0$, $t_4 = 0$, en la hipòtesi que els mòduls no hi afegeixin símbols electius nous. L'equació donada seria equivalent al sistema

$$\begin{cases} a_1 t_1 + a_2 t_2 = 0 \\ \qquad\qquad t_3 = 0 \\ \qquad\qquad t_4 = 0 \end{cases}$$

Teor. 3 Qualssevol que siguin F i els valors dels a_i, és

$$F\left(\sum_{i=1}^{r} a_i t_i\right) = \sum_{i=1}^{r} F(a_i) t_i .$$

Prova. Sigui $\sum_{i=1}^{r} a_i t_i = \phi(x, y, ...)$. És

$$\begin{aligned} F(\Sigma\, a_i t_i) &= F(\phi(x, y...)) = (Fo\phi)(x, y, ...) = \\ &= (Fo\phi)(00..)(1 - x)(1 - y)... + ... + (Fo\phi)(11..)xy.. = \\ &= F(a_1)(1 - x)(1 - y).. + ... + F(a_r)xy.. = \\ &= \Sigma\, F(a_i)t_i. \end{aligned}$$

Teor. 4 Per a qualsevol procés de raonament aplicat a una proposició donada, el resultat és la mateixa proposició o bé n'és una limitació.

Prova. Sigui una proposició d'equació $\Sigma\, a_i t_i = 0$. Apliquem la transformació general H:

$$\begin{aligned} &H(\Sigma\, a_i t_i) = H(0) \\ &\Sigma\, H(a_i)t_i = H(0)\, \Sigma\, t_i \\ &\Sigma\, (H(a_i) - H(0))t_i = 0, \text{ és l'equació de la nova proposició.} \end{aligned}$$

En els casos que:

– $a_i = 0$, és $H(a_i) - H(0) = 0$ i no hi apareix cap terme nou.

– $a_i \neq 0$, pot ésser $H(a_i) - H(0) \neq 0$ i tenim $t_i = 0$, que ja era un terme de la proposició donada, si la diferència no comporta nous símbols electius, i tenim $(H(a_i) - H(0))t_i = 0$ si aquesta diferència incorporés símbols nous, cosa que és una limitació de la proposició, o pot ésser $H(a_i) - H(0) = 0$ i desapareix un constituent, cosa que també és una limitació.

Vet aquí un exemple, trivial però il·lustratiu, de l'ús que fa Boole d'aquests resultats. La proposició "Els X i els Y són idèntics" es tradueix per $x = y$, que dóna l'equació electiva $x - y = 0$. La funció $\phi(x, y) = x - y$ té els mòduls

$$\phi(00) = \phi(11) = 0, \phi(10) = 1, \phi(01) = -1,$$

i doncs

$$0 = x - y = -(1 - x)y + x(1 - y) \quad \text{equivalent a} \begin{cases} (1 - x)y = 0 \\ x(1 - y) = 0 \end{cases}$$

és a dir, a les dues proposicions "Tots els Y són X" i "Tots els X són Y".

Vegem, per acabar aquest paràgraf, com resol en general les equacions electives. I comencem amb l'exemple $(1 - x)zy = 0$, que és l'equació de "Tots els Y que són Z, són X", i de la qual volem conèixer y com a funció de z i de x. Serà:

$$y = y(x, z) = a_1 (1 - x)(1 - z) + a_2 (1 - x)z + a_3 x(1 - z) + a_4 xz,$$

que substituïda en l'equació dóna

$$0 = (1 - x)z\, y = a_2 (1 - x)z,$$

cosa que comporta $a_2 = 0$, ja que val per a tots els valors (n'hi ha prou de fer $x = 0$, $z = 1$). La solució general és:

$$\begin{cases} y = a_1 (1 - x)(1 - z) + a_3 x(1 - z) + a_4\, xz \\ \text{“Tot Y és algun no-X i no-Z o algun X i no-Z o algun X i Z”} \end{cases}$$

És clara la semblança amb el que hom fa amb les equacions diferencials.

Problema: Resoldre l'equació electiva $\phi(x, y) = 0$, respecte a y.

Solució. Serà $y = ax + b(1 - x)$ i ens cal determinar els mòduls a i b. Substituirem aquesta expressió en el desenvolupament de ϕ:

$$\begin{aligned} 0 = \phi(x, y) &= \phi(00)(1 - x)(1 - ax - b(1 - x)) + \phi(01)(1-x)(ax+b(1-x))+ \\ &+ \phi(10)x(1 - ax - b(1 - x)) + \phi(11)x(ax + b(1 - x)) = \\ &= \phi(00)(1 - ax - b(1 - x) - x + ax + bx(1 - x)) + \ldots = \\ &= \phi(00)(1 - x)(1 - b) + \phi(01)(1 - x)b + \phi(10)x(1 - a) + \\ &+ \phi(11)xa = x(\phi(10) + a(\phi(11) - \phi(10)) + (1 - x)(\phi(00) + \\ &+ b(\phi(01) - \phi(00))), \end{aligned}$$

cosa que condueix a (fent, per exemple, $x = 1$ i $x = 0$):

$$\phi(10) + a(\phi(11) - \phi(10)) = 0 \Rightarrow a = \phi(10) / (\phi(10) - \phi(11)),$$
$$\phi(00) + b(\phi(01) - \phi(00)) = 0 \Rightarrow b = \phi(00) / (\phi(00) - \phi(01)),$$

que dóna finalment,

$$y = \frac{\phi(10)}{\phi(10) - \phi(11)}\, x + \frac{\phi(00)}{\phi(00) - \phi(01)}\, (1 - x).$$

I aquí, naturalment, hem de fer unes observacions. Diu Boole que *"pot ésser que ens apareguin els mòduls* 0/0 o 1/0, *el primer dels quals és un símbol indefinit i caldrà llegir-lo com "alguns", el segon no és 0 i caldrà igualar el terme corresponent a zero".*

Problema: Resoldre l'equació electiva $\phi(x, y, z) = 0$ respecte a z com a funció de x i de y.

Solució. De $0 = \phi(x, y, z) = \phi(x, y, 0)(1 - z) + \phi(x, y, 1)z$, hom arriba a:

$$z = \frac{\phi(xy0)}{\phi(xy0) - \phi(xy1)} = \frac{\phi(000)}{\phi(000) - \phi(001)}(1 - x)(1 - y) +$$

$$+ \frac{\phi(100)}{\phi(100) - \phi(101)} x(1 - y) + \frac{\phi(010)}{\phi(010) - \phi(011)}(1 - x)y +$$

$$+ \frac{\phi(110)}{\phi(110) - \phi(111)} xy,$$

que resol el problema.

Exemple: Resoldre l'equació $y(1 - z(1 - x)) = 0$, que representa "Tots els Y són Z i no-X", expressant z com a funció de x i de y.

Si $\phi(xyz) = y(1 - z(1 - x))$, és $\phi(111) = \phi(010) = \phi(110) = 1$ i $\phi(000) = \phi(001) = \phi(100) = \phi(101) = \phi(011) = 0$, per tant,

$$z = \frac{0}{0}(1 - x)(1 - y) + \frac{0}{0}x(1 - y) + \frac{1}{1}(1 - x)y + \frac{1}{0}xy,$$

que representa les equacions:

$$xy = 0,\ z = (1 - x)y + v(1 - x)(1 - y) + v'x(1 - y) =$$
$$= (1 - x)y + (1 - y)(v(1 - x) + v'x)$$

o sia:

$$\begin{cases} xy = 0 \\ z = (1 - x)y + W(1 - y) \end{cases}$$

que representen:
"Cap X no és Y i els Z són tots els Y que no són X més un residu indefinit de no-Y".

Amb això acabem aquest breu cop d'ull al primer llibret de Boole. És clar que amb Boole hom arriba a un nivell de càlcul important, a partir d'un petit nombre de pressupòsits, i que l'àlgebra de la Lògica té, en el seu fundador, un important aspecte de càlcul operacional.

Després de Boole

La segona meitat del segle XIX veié una alteració dels interessos filosòfics purs, una ampliació de perspectives degudes a les recerques científiques. Hi hagué una notable quantitat de gent de ciència que, amb nous resultats, aportaren nous modes de fer i de veure la ciència, cosa que alterà les relacions entre ciència i filosofia. Pensem, en primer lloc, en aquells físics i matemàtics que estudiaren sistemàticament els fonaments de llurs ciències: Ernst Mach visqué entre 1838 i 1916 i Georg Cantor entre 1845 i 1918 i el Programa d'ERLANGEN, de Felix Klein, és de 1872. Entre moltes altres dates.

En aquest ambient cultural de canvi la Lògica trobà noves i amplíssimes exigències i possibilitats de desenvolupament i un *segon pas* en la seva renovació la portà més lluny. El càlcul de Boole és una teoria matemàtica especial, com ja hem dit, que, això no obstant, és molt lluny de contenir la totalitat de la lògica, que no és limitada, també ha estat dit, a tractar amb classes. Hom espera de la Lògica que tracti les regles d'inferència o regles de combinar i transformar proposicions per tal de tenir noves proposicions. Tal segon pas en l'expansió de la Logística fou el desenvolupament d'un càlcul de proposicions que estudià com es relacionen les proposicions entre elles i com es combinen amb paraules com "i", "o", "no", etc.

Són d'especial importància aquelles proposicions que són veritat en tots els casos, tant si les components en són certes com falses; així "plou o no plou" és veritat tant si plou com si no plou. Aquestes proposicions són anomenades *tautologies* i el càlcul de proposicions tracta el llistat de les tautologies. Hom no ha de pensar que aquest càlcul tracti únicament d'aquelles transformacions que resulten de l'aplicació dels tres principis aristotèlics d'identitat, contradicció i tercer exclòs; aquest no és pas el cas. Els tres principis hi juguen un paper semblant al dels 19 modes d'inferència escolàstics en el càlcul de classes: els tres principis surten entre els teoremes del càlcul de proposicions de Frege (que visqué entre 1848 i 1925), però ni són els únics ni hi tenen un lloc gaire destacat ni són entre les proposicions inicials. Ni en són una part necessària de la fonamentació ni són suficients per a deduir la totalitat del càlcul de proposicions. Així, *el càlcul de proposicions fou un nou avenç sobre l'antiga Lògica.*

No és, però, el nostre objectiu seguir aquesta direcció. Hem de continuar fins a l'aparició del que *ara* s'anomena "l'àlgebra de Boole".

Foren molts els continuadors del càlcul booleà. Al Regne Unit foren Jevons, McColl, John Venn, MacFarlane i Ellis. Als Estats Units foren Huntington, Peirce, Halsted, Franklin i Mitchell. D'alguns no en podrem dir res; però cal assenyalar que fins i tot els menys coneguts tenen treballs importants que han influït en els estudiosos de la Lògica matemàtica. Així, John Venn, amb els seus llibres *Studies in Logic, Simbolic Logic* (1881) i, sobretot, *The Logic of Chance,* de 1886, que és tot un títol! Així, William Stanley JEVONS, que presentà una màquina lògica en l'article "On the mechanical performance of logical inference", publicat el 1870 en els Philosophical Transactions de la Royal Society. La seva obra "Primer of Logic" de 1878 fou traduïda al castellà a Madrid el 1952!

A Alemanya, contemporàniament a la sistematització de l'àlgebra de la Lògica per Grassmann, Lüroth i Müller i sobretot per Schröder, de qui parlarem aviat, assistim al naixement dels estudis sobre els fonaments de la Matemàtica en la direcció logicista; ja hem citat Frege.

A Rússia els estudis de la Lògica trobaren els importants treballs algèbrics de Plató S. Poretski, professor de la Universitat de Kazan, la mateixa de Vasiliev, un dels pares de les lògiques polivalents, i de la qual fou professor i Rector Lobačevskij.

A França cal destacar, cap al final del segle, el bon estudiós de Leibniz i ja citat Louis Couturat, que en el seu llibret "L'àlgebra de la Lògica", de 1905, féu una presentació didàctica i sistemàtica del millor de Schröder i Poretski. Diguem, per tal de centrar un món francès, molt important, el de l'epistemologia, que Pierre Duhem visqué de 1861 a 1916 i que Gaston Bachelard ho féu de 1884 a 1962.

A Itàlia, Giuseppe Peano (1858-1932) féu unes contribucions molt importants per a l'explicació en termes lògics de la matemàtica i per això hom col·loca sempre les seves obres en l'àmbit logicista, per bé que les seves diferències amb Frege són molt importants i que els seus propòsits eren determinats, més aviat, pel desig d'introduir milloraments tècnics en la presentació de les Matemàtiques. Cal dir, però, que els seus treballs en el camp de l'àlgebra de la Lògica foren molt importants i originals. Distingí clarament la pertinença a una classe de la inclusió, cosa que no havia fet Schröder, i expressà els teoremes com a implicacions i no com a equacions; és dels que fan servir correctament la inclusió!

Per tal d'assegurar que no hi hagi errors, Peano ideà un nou llenguatge simbòlic amb el qual formalitzà les definicions i els enunciats i, encara que no portà les coses gaire lluny, les seves idees bàsiques foren emprades per Russell i Whitehead com a punt de partida del sistema dels "Principia Mathematica". En l'article "El meu desenvolupament intel·lectual" Russell diu: "L'any 1900 fou el més important de la meva vida intel·lectual i la visita al Congrés Internacional de Filosofia a París el fet més important de l'any... m'impressionà el fet que, en totes les discussions, Peano i els seus deixebles parlaven amb una precisió de la qual els altres mancaven. Li vaig demanar si podia donar-me els seus treballs i ell ho féu. Tan bon punt vaig dominar la seva notació, vaig observar que estenia l'àmbit de la precisió matemàtica a regions que sempre havien estat sotmeses a la vaguetat filosòfica". És tot un elogi.

Diguem unes quantes coses de la contribució de Peano a l'àlgebra de la Lògica. El seu primer treball lògic, "Operazioni della logica deduttiva" (1888), és sobre el càlcul de classes i aparegué entre els dos primers llibres de Schröder. Entre aquest treball i el "Notations de logique mathématique", de 1894, i el que hi ha a la introducció del "Formulaire de Mathématiques" de 1895, hom pot fer una petita síntesi. Peano fa servir:

1. *Símbols categoremàtics* (subjectes, predicats, enunciats): A, B, C, ... V, Λ, ...
2. *Símbols sincategoremàtics* (connectius, operadors) =, U, $\cap$, –, ...
3. *Símbols auxiliars,* els parèntesis.
4. *Regles de construcció d'expressions correctes (e.c.).*

   4.1. A, B, C, ..., V, Λ, ... són e.c.

   4.2. Si o és del conjunt $\{=, \mathrm{U}, \cap\}$ i si α, β són e.c., també ho és α o β.

   4.3. Si α és una e.c. també ho és $\bar{\alpha} = -\alpha$.

5. *Abreviatures.*

   5.1. $A\underline{B} = A \cap B$

   5.2. $A\bar{B} = \Lambda$ per $A < B$ o per $B > A$

   5.3. $(A = B)$ per $(A < B)$ i $(B \geq A)$

6. *Axiomes.*

   6.1. $AB = BA$

   6.2. $(AB)C = A(BC)$

   6.3. $AA = A$

   6.4. $A(B \mathrm{U} C) = A B \mathrm{U} AC$

   6.5. $AV = A$

   6.6. $A = \bar{\bar{A}}$

   6.7. $A\underline{B} = A \mathrm{U} B$

   6.8. $A\bar{A} = \Lambda$

   6.9. $\bar{V} = \Lambda$.

7. *Regles de càlcul.*

   7.1. Regla de substitució: Si $\alpha = \beta$, hom pot substituir α per β en tot lloc. Escriu α/β per tal d'indicar que substitueix cada α per β.

   7.2. $A = B$ implica $\bar{A} = \bar{B}$

   7.3. $A \gtreqless B$ implica $CA \gtreqless CB$

   7.4. $A \gtreqless B$ implica $C\mathrm{U}A \gtreqless C\mathrm{U}B$

   7.5. Si α és una e.c., la seva e.c. dual és la que hom obté de la α canviant U per $\cap$, $\cap$ per U, V per Λ i Λ per V. També és una e.c.

Vet aquí una prova típica de Peano:

1. $A\Lambda \overset{\Lambda/A\bar{A}}{=} A(A\bar{A}) \overset{6.2}{=} (AA)\bar{A} \overset{6.3}{=} A\bar{A} \overset{6.8}{=} \Lambda$.
2. $B \mathrm{U} V = V$, com e.c. dual de la $A\Lambda = \Lambda$ (6.8)
3. $A \; U \; AB \underset{A/AV}{=} (AV)\mathrm{U}AB \overset{6.4}{=} A(V \mathrm{U} B) \underset{\substack{\text{dual}\\ 6.1}}{=} A(B \mathrm{U} V) \overset{2}{=} AV \overset{6.5}{=} A$.

Peano distingeix entre classes conegudes (classi fisse) A, B, .. i classes incògnites (classi incognite) X, Y, .. i defineix: Una expressió obtinguda operant un nombre finit de vegades sobre una classe X, i sobre unes altres de conegudes, amb els símbols U, $\cap$, $-$, és una funció de X i s'escriu f(X). Peano demostrà que tota f(X) pot ésser escrita en la forma única $f(X) = f(V)X \cup f(\Lambda)\bar{X}$ i per a les funcions f(X, Y, ...) fa el mateix procés que Boole.

Anomena equació lògica tota igualtat d'e.c. que inclogui classes incògnites i prova que $(A = \Lambda)$ i $(B = \Lambda)$ és equivalent a $(A \cup B = \Lambda)$, que juntament amb 5.2 porta a $(A = B)$ equival a $(A < B)$ i $(A > B)$ equival a $(\bar{A}B = \Lambda)$ i $(A\bar{B} = \Lambda)$ equival a $(\bar{A}B \cup A\bar{B} = \Lambda)$, amb la qual cosa tota equació lògica és equivalent a una altra amb el segon membre igual a Λ. Així, un sistema d'equacions lògiques amb una incògnita podrà ésser reduït sempre a

$$f(X) = \Lambda \Leftrightarrow f(V)X \cup f(\Lambda)\bar{X} = \Lambda \Leftrightarrow (f(V)X = \Lambda) \text{ i } (f(\Lambda)\bar{X} = \Lambda) \Leftrightarrow (X < \overline{f(V)}) \text{i}$$
$$(f(\Lambda) < X) \Leftrightarrow f(\Lambda) < X < \overline{f(V)},$$

i Peano ens ha portat plenament a l'ús de la inclusió.

El certificat de baptisme de l'Àlgebra de la Lògica

Aquest certificat vingué d'Alemanya i de Rússia i, naturalment, ens caldrà exposar-lo a través de França. Però, primer, hem de dir quelcom de dos grans personatges.

1. El període primitiu, algèbric, de la lògica matemàtica acaba de fet amb Ernst F.W.K. Schröder, nascut a Pforzheim el 1841 i mort a Karlsruhe el 1902 on fou, des del 1876, professor de Matemàtiques a la Technische Hochschule. Després d'importants estudis aritmètics es dedicà amb intensitat a la Lògica; les seves obres principals són

– *Der Operationkreis des Logikkalküls,* de 1877,

– *Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik),* 3 vols., 1890-1905,

– *Abriss der Algebra der Logik,* 1909.

Gran part de la seva obra fou d'ordenació del passat. Rebutjà les mal definides operacions inverses de Boole i féu servir, com Jevons i Peirce, la suma en sentit de disjunció inclusiva. *Sobretot,* com Peano, *considerà des del començament la inclusió* i emprà la dualitat sistemàticament. Aquí cal recordar que la dualitat a la geometria, vista per Poncelet el 1822, fou enunciada amb generalitat per Diaz Gergonne el 1827.

S'interessà per la independència, que no preocupava gens Boole, i això el portà a veure que la llei distributiva era realment independent dels altres axiomes: crec que fou el primer a tenir una idea conscient dels reticles no-distributius. Criticant la noció morgiano-booleana de l'univers del discurs arribà a idees anàlogues a les de la teoria dels tipus de Russell; així, diu en els *Vorlesungen:* "és necessari... que entre els elements donats com a individuals no hi hagi classes que tinguin, com a elements. individuals de la mateixa multiplicitat".

Diguem que els seus resultats relatius a les equacions booleanes foren recollits per Whitehead en el seu "Treatise on Universal Algebra" de 1898.

2. Als EE.UU. destaca un personatge genial i polifacètic que es dedicà prolíficament a diverses disciplines: lògica, matemàtiques, química, història de la ciència i metafísica. El seu nom és associat al naixement del pragmatisme americà; és Charles Sanders Peirce (1839-1914). El seu primer article fou "Memoranda Concerning the Aristotelian Syllogism", el 1866, i era fill del matemàtic Benjamin Peirce, autor del famós treball "Linear Associative Algebra" (del 1864, però publicat el 1881). Peirce continuà aquest treball del seu pare i veié que, entre aquelles àlgebres, només n'hi ha tres en què la divisió és definida unívocament (l'àlgebra real ordinària, la dels nombres complexos i la dels quaternions).

En el camp lògic tendí a fer autònoma i independent la lògica matemàtica, segons una classificació precisa de les operacions; també contribuí a la introducció de les taules de veritat i posà un persistent èmfasi en el fet que l'antiga distinció entre termes, proposicions i inferències té poca importància ja que tot és, en darrer terme, una implicació. És important com introdueix els quantificadors; p. ex., a "On the Algebra of Logic, a Contribution to the Philosophy of Notation" (*Amer. Journal of Maths.*, **VII**, 1885), diu "amb la finalitat de fer la notació el més icònica possible, podem fer servir Σ, que suggereix una suma, per *algun* i Π, que suggereix un producte, per *tot.* De tal manera, $\Sigma_i x_i$ significa que x és veritat per a algun dels individuals designats per x_i i, de la mateixa manera, $\Pi_i x_i$ significa que x és veritat per a tots aquests elements".

Assenyalem també que a "Description of a notation for the Logic of Relations", publicat a *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences,* **IX**, 1870, escriu les lleis:

I.	$a +, a = a$	$aa = a$
	$a +, b = b +, a$	$ab = ba$
	$(a +, b) +, c = a +, (b +, c)$	$(ab)c = a(bc)$
	$(a +, b)c = ac +, bc$	$ab +, c = (a +, c)(b +, c)$

on +, és la suma no-exclusiva.

II. Si $a \prec b$ i $b \prec c$, aleshores $a \prec c$
Si $b \prec a$, hi ha un x tal que $a +, x = b$
Si $b \prec a$, hi ha un y tal que $by = a$
Si $b \prec a$, aleshores valen $(c +, b) \prec (c +, a)$ i $cb \prec ca$
És $a \prec ab$ i $a +, b \prec a$

on $\prec$ és "implica".

III. Per a cada x, la seva negació n^x verifica $xn^x = 0$, $x +, n^x = 1$.

Sense discutir la independència d'aquest conjunt de lleis lògiques (conjunt parcial!), val a afirmar que ja s'hi presenten tots els trets essencials que permetran el progrés de la Lògica matemàtica. El 1885 establí un conjunt axiomàtic per al càlcul proposicional, a partir de la implicació i de la negació (com a implicació d'una proposició de la qual no se segueix res, on per primer cop aparegué la famosa llei

$$((a \prec b) \prec a) \prec a,$$

dita de Peirce.

Diguem, per acabar, i com a curiositat, que per a Peirce els termes generals són proposicions privades de subjecte o frases amb forats, en els quals irien els noms i en les quals el nombre de forats és l'*aditat* del terme general. Així "–estima–" és diàdica, "–dóna–a–" és triàdica, etc. Comparà els termes, vistos així, amb radicals químics no saturats de diverses valències. Les idees de Peirce han agafat modernament molta importància en molts camps (en el de la semiòtica, per exemple) i existeix una "Peirce Society" responsable de la publicació d'una nova edició de les seves obres.

3. Expressament no hem parlat del connectiu *implicació* fins al final perquè hem cregut que realment desborda el naixement de l'àlgebra de la Lògica. Del conjunt de les regles per tal de treballar amb *o, i, no, implica, tots, alguns,* ... hom en digué el *càlcul de funcions* perquè afecten subjectes que poden ésser qualssevol i que, quan són substituïts per valors concrets, donen proposicions.

El càlcul de classes i de proposicions, juntament amb el de funcions, encara podrien ésser considerats un refinament de l'antiga Lògica. Però el següent pas cap a la nova lògica, que també vingué dels matemàtics, fou una extensió de tot això; com Leibniz ja havia notat, Peano i Peirce observaren que proposicions importants de les matemàtiques tracten amb relacions; és el cas de "3 és més petit que 5" i "el punt a és entre els punts b i c". Una lògica útil als matemàtics havia de tractar sobretot amb relacions.

4. Hem dit que el certificat de baptisme l'aniríem a cercar a França. Aquest certificat és el llibre de Louis Couturat titulat "L'àlgebre de la Logique", publicat el 1905 i que fou traduït al castellà el 1956, a l'Editorial Tecnos de Madrid.

La relació fonamental és anomenada d'inclusió i s'escriu amb el signe <. Tal relació és considerada primera i indefinible, però satisfent les següents proposicions:

1. *Principi d'identitat.* $a < a$, qualsevol que sigui a.

2. *Principi del sil·logisme.* Si $a < b$, i si $b < c$, aleshores és $a < c$.

Amb la definició $a = b \Leftrightarrow a < b$ i $b < a$, el principi d'identitat implica $a = a$ per a tot a.

3. *Postulat del producte.* Qualssevol que siguin a i b, existeix un p tal que

   3.1. $p < a, p < b$

   3.2. Per a tot x, tal que $x < a$, $x < b$, és $x < p$.

És fàcil de veure que p és únic, s'escriu $p = ab$ i es diu que *ab és el producte* de a i b.

4. *Postulat de la suma.* Qualssevol que siguin a i b, existeix un s tal que

   4.1. $a < s, b < s$

   4.2. Per a tot x tal que $a < x$, $b < x$, és $s < x$.

És fàcil de veure que s és únic, s'escriu $s = a + b$ i es diu que *a + b és la suma* de a i b.

Amb aquests principis ja és possible obtenir uns primers resultats. Per exemple, ja que les definicions de suma i producte lògics no impliquen cap ordre entre els elements que hom compon, és evident que valen les

Lleis commutatives. $ab = ba$, $a + b = b + a$.
Lleis associatives. $a(bc) = (ab)c$, $a + (b + c) = (a + b) + c$.

En provarem algunes d'importants.

Lleis de tautologia. $aa = a$ i $a + a = a$.

En efecte, $aa < a$ i, d'altra part, $(a < a)$ i $(a < a)$ impliquen $a < aa$. Per tant $aa = a$. Hom obté l'altra anàlogament.

Lleis d'absorció. $a + ab = a$ i $a(a + b) = a$.

En efecte, $a < a + ab$ i, d'altra part, $a < a$ i $ab < a$ impliquen $a + ab < a$. Per tant $a + ab = a$. Hom obté l'altra anàlogament.

Per tant un terme a absorbeix un sumand ab del qual és factor o un factor $a + b$ del qual és sumand.

Teoremes de multiplicació i addició. Si $a < b$, aleshores valen $ac < bc$ i $a + c < b + c$.

En efecte, provarem la segona. És

$$\left.\begin{array}{r} a < b \text{ i } b < b + c \Rightarrow a < b + c \\ \text{Com que} \quad c < b + c \end{array}\right\} a + c < b + c.$$

Fórmula 1.ª de transformació d'inclusions en igualtats.

$$a < b \overset{(1)}{\Leftrightarrow} a = ab \overset{(2)}{\Leftrightarrow} a + b = b$$

Vegem només la prova de (2). De $a < b$ i de $b < b$ se segueix $a + b < b$. Recíprocament, de $a < a + b$ i $a + b = b$, se segueix $a < b$.

Corol·lari. $a = b \Leftrightarrow ab = a + b$.

Lleis distributives inverses. $ac + bc < (a + b)c$, $ab + c < (a + c)(b + c)$.

Provem la primera:

$$\left.\begin{array}{l} a < a + b \Rightarrow ac < (a + b)c \\ b < a + b \Rightarrow bc < (a + b)c \end{array}\right\} ac + bc < (a + b)c.$$

Hom prova l'altra de la mateixa manera.

No és possible de provar, però, les lleis distributives directes

$$(a + b)c < ac + bc \quad , \quad (a + c)(b + c) < ab + c$$

i cal postular-ne una per tal de tenir les lleis distributives. Així, acceptarem el

5. *Postulat de distributivitat.* $(a + b)c < ac + bc$

que porta immediatament a la

1.ª Llei distributiva. $(a + b)c = ab + ac$.

Aleshores, és $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$ i, en particular, hom obté $(a + c)(b + c) = ab + cb + ac + c = ab + cb + (c + ca) = ab + cb + c =$ $= ab + (c + cb) = ab + c$, amb la qual cosa val la

2.ª Llei distributiva. $ab + c = (a + c)(b + c)$.

Corol·lari. $ab + ac + bc = (a + b)(a + c)(b + c)$.

En efecte, és $(a + b)(a + c)(b + c) = (a + bc)(b + c) = ab + ac +$ $+ \boldsymbol{bcb} + \boldsymbol{bcc} = ab + ac + bc$.

Cal fer l'obrservació que, axiomàticament i deductiva, hom ha obtingut un reticle distributiu. És un fet històric. Encara calen, per tal d'arribar a l'àlgebra de Boole, alguns postulats més.

6. *Postulat d'existència del mínim.* Existeix un element 0 tal que, qualsevol que sigui x, és $0 < x$.

7. *Postulat d'existència del màxim.* Existeix un element 1 tal que, qualsevol que sigui x, és $x < 1$.

És immediat que: $0 < 0$, $0 < 1$, $1 < 1$ i que $a < 0 \Rightarrow a = 0$ i $1 < a \Rightarrow a = 1$.
A més, $0 < a \Leftrightarrow 0 = 0.\ a \Leftrightarrow a + 0 = a$, i $a < 1 \Leftrightarrow a = a.\ 1 \Leftrightarrow a + 1 = 1$.
Encara cal, però, el

8. *Postulat d'existència de l'univers.* $1 \not< 0$.

Que implica $1 \neq 0$.

Lema. ($ac = bc$ i $a + c = b + c$) $\Rightarrow a = b$.

En efecte,

$$a + c = b + c = \begin{cases} (a + c)a = (b + c)a \Rightarrow a + ac = ab + ac \\ (a + c)b = (b + c)b \Rightarrow ab + bc = b + bc, \end{cases}$$

$$ac = bc \Rightarrow ab + ac = ab + bc \Rightarrow a + ac = ab + bc \Rightarrow a + ac = \\ = b + bc \Rightarrow a = b, \text{ per la llei d'absorció.}$$

9. *Postulat d'existència de la negació.* Per cada element a existeix un a' tal que és alhora $aa' = 0$ i $a + a' = 1$.
(a' és la notació introduïda per McColl. Com s'ha dit, Peano escriví $-a$ o $\bar{a}$, i Schröder a_1).

Unicitat de la negació. És conseqüència immediata del Lema. Si, donat a, existeixen dos elements que satisfan el postulat 9, siguin a' i a_0', aleshores

$$aa' = aa_0' \ (= 0) \text{ i } a + a' = a + a_0' \ (= 1) \Rightarrow a' = a_0'.$$

Llei de la doble negació. $a'' = a$.

En efecte, si a' és la negació de a, i a'' la negació de a',

$$aa' = a'a''(= 0) \text{ i } a + a' = a' + a''(= 1) \Rightarrow a'' = a.$$

Corol·lari. $a = ab + ab'$, $a = (a + b)(a + b')$

En efecte, $a = a1 = a(b + b') = ab + ab'$, $a = a + 0 = a + bb' = (a + b)(a + b')$, qualssevol que siguin a i b.

Fórmules de DeMorgan. $(a + b)' = a'b'$, $(ab)' = a' + b'$.

En efecte $a + b = ab + ab' + ba + ba' = ab + ab' + a'b$ i, d'altra banda, $1 = 11 = (a + a')(b + b') = ab + ab' + a'b + a'b'$. Així, $1 = a + b + a'b'$, d'on $(a + b)' = a'b'$. D'aquí, $(a' + b')' = a''b'' = ab \Rightarrow (ab)' = a' + b'$.

Fórmula 2.ª de transformació d'inclusions en igualtats.

$$a < b \Leftrightarrow ab' = 0 \Leftrightarrow a' + b = 1$$

Prova.

- $a < b \Rightarrow ab' < bb' = 0 \Rightarrow ab' = 0$,
- $ab' = 0$, com que $a = ab + ab'$, implica $a = ab \Rightarrow a < b$.

Hom prova les altres equivalències anàlogament.

Corol·lari. $a < b \Leftrightarrow b' < a'$ (Llei de contraposició).
En efecte, $a < b \Leftrightarrow ab' = 0 \Leftrightarrow a''b' = 0 \Leftrightarrow b' < a'$.

Ara som en condicions d'avançar cap l'anàlisi de les funcions $f(x)$, *funcions lògiques,* obtingudes a partir de l'element x i d'altres elements lligats pels signes de les tres operacions lògiques, anàlogament a les funcions enteres de l'àlgebra ordinària amb la diferència que no hi ha més potències de x que la primera. Els mateixos raonaments que hom ha ha fet, ara poden ésser reiterats. Si $f(x) = ax + bx'$, aleshores $x = 1$ i $x = 0$ porten a $a = f(1)$, $b = f(0)$ i, doncs, f es descompon:

$$f(x) = f(1)x + f(0)x'.$$

Igual que abans hom obté

$$f(x, y) = f(11)xy + f(10)xy' + f(01)x'y + f(00)x'y', \text{ etc.}$$

Com que

$$\begin{aligned} 1 &= x + x' \\ 1 &= (x + x')(y + y') = xy + xy' + x'y + x'y' \\ 1 &= (x + x')(y + y')(z + z') = xyz + xyz' + xy'z + x'yz + xy'z' + \\ &\quad + x'yz' + x'y'z + x'y'z' \end{aligned}$$

etc.,

tenim la descomposició de l'univers en els *constituents* de Boole, que Poretsky anomenava els *minima* del discurs i que apareixen en el desenvolupament de f(x), f(x, y), f(x, y, z), etc.

Teorema de les fites d'una funció. Si $f(x) = ax + bx'$, aleshores $ab < f(x) < a + b$.

En efecte, és: 1) $ab < a \Rightarrow abx < ax$; $ab < b \Rightarrow abx' < bx'$ i per tant $abx + abx' < ax + bx'$, o sia, $ab < ax + bx' = f(x)$. 2) $a < a + b \Rightarrow ax < (a + b)x$; $b < a + b \Rightarrow bx' < (a + b)x'$ i per tant $ax + bx' < (a + b)(x + x') = a + b$, o sia, $f(x) < a + b$.

Observació. Com que $f(a) = aa + ba' = a + b$ i $f(b) = ab + bb' = ab$, el teorema de les fites pot ésser escrit $f(b) < f(x) < f(a)$.

Observació. El teorema de les fites és general per a qualsevol nombre de variables.

Acabarem aquest cop d'ull a les bases del sistema de Schröder i Poretsky donant els dos teoremes bàsics per al tractament de les equacions lògiques, teoremes que, en certa forma, també són l'inici de nocions geomètriques d'allò que, molt després, ha estat anomenat la geometria booleana.

Teorema de Poretsky. És $x = ax + bx'$, si i només si $b < x < a$.

En efecte, si $x = ax + bx'$, és $\left.\begin{array}{l} x = xx = ax + bx'x = ax \Rightarrow x < a \\ xx' = axx' + bx', 0 = bx' \Rightarrow b < x \end{array}\right\} \Rightarrow b < x < a.$

D'altra banda, si $b < x < a$, és $\left.\begin{array}{l} x < a \Rightarrow x = ax \\ b < x \Rightarrow 0 = bx' \end{array}\right\} \Rightarrow x = ax + bx'.$

Teorema de Schröder. És $ax + bx' = 0$, si i només si $b < x < a'$.

En efecte, si $ax + bx' = 0$, és:

$axx' + bx' = 0$, o sia $bx' = 0$ que equival a $b < x$.

$ax + bx'x = 0$, o sia $ax = 0$ que equival a $x < a'$.

El recíproc és evident.

Observació. Si *$f(x) = 0$ és una equació lògica* en una variable, aleshores f(x) escrita en la forma $ax + bx'$ serà $f(1)x + f(0)x' = 0$ i, pel teorema de Schröder, resulta que *$f(0) < x < f(1)'$ són els x que resolen l'equació.* És clar, *per tal que l'equació* $f(x) = 0$ *sigui compatible caldrà que sigui $f(0) < f(1)'$, cosa equivalent a $f(0) \cdot f(1) = 0$.*

Final

Aquesta exposició no pretén haver esgotat el tema "El naixement de l'Àlgebra de la Lògica". Hom només ha fet una presentació, molt abreujada, de la línia booleana inicial de treballar amb *igualtat i sense desigualtat* i, de manera encara més breu, de la línia Peirce-Peano-Schröder-Poretsky de *desigualtat i reticle distributiu complementat,* el que avui s'anomena una àlgebra de Boole. Tot en el ben entès que l'Àlgebra de la Lògica no omple tot el camp de la Lògica Matemàtica. A més a més, com diu Couturat, "l'àlgebra de la Lògica és una Lògica matemàtica, tant per la forma com pel mètode, però no l'hem pas de prendre com la Lògica de les Matemàtiques".

L'algebra de la Lògica nasqué, com ho palesa el subtítol de les *Laws of Thought,* i també els treballs anteriors de Bolzano i DeMorgan, amb interessos aplicats ben clars. Des de sempre ha representat quelcom d'operatiu, útil per tal de modelitzar matemàticament problemes de raonament no exacte, i la seva vinculació al càlcul i a la teoria de les probabilitats li ve de naixement. Acabem amb unes paraules de Peirce:

> "L'ús principal del càlcul de la Lògica, establert per Boole, és en les seves aplicacions a problemes de probabilitats. Aquest càlcul consisteix, essencialment, en un sistema de signes designant relacions lògiques entre classes i les dades d'alguns problemes poden ésser expressades per mitjà d'aquests signes, de tal manera que, amb certes regles de transformació, hom pot obtenir per a les classes, esdeveniments o coses, expressions les freqüències de les quals poden ésser calculades en funció d'aquelles freqüències que són conegudes. Si hom coneix certes relacions entre les relacions lògiques i les operacions aritmètiques, les expressions dels esdeveniments poden ésser convertides en expressions de llur probabilitat".

Això fou dit el 1867. Era tot un món d'idees que s'havia obert.

Barcelona, 23 de febrer (nit) de 1981.